SESIÓN 15

APLICACIÓN DE LA DERIVADA EN RAZONES DE CAMBIO

I. CONTENIDOS:

1. Conceptos básicos que definen una razón de cambio
2. Aplicaciones en la solución de diversos tipos de problemas
3. Estrategias Centradas en el Aprendizaje: Problemas propuestos.

II. OBJETIVOS:

Al término de la Clase, el alumno:

- Interpretará concepto de razón de cambio promedio e instantáneo
- Resolverá problemas donde se impliquen razones de cambio

III. PROBLEMATIZACIÓN:

Comenta las preguntas con tu Asesor y selecciona las ideas más significativas.

- ¿Se puede calcular la distancia a la cual frenará un automóvil, conociendo su velocidad inicial?
- ¿Se puede calcular cual es la máxima utilidad que nos deja un artículo al fabricarlo bajo cierta condiciones?
- ¿Cómo podemos maximizar el uso de un recurso en un determinado proceso?

IV. TEXTO INFORMATIVO-FORMATIVO:

1.1. CONCEPTOS BÁSICOS QUE DEFINEN UNA RAZÓN DE CAMBIO

Para el estudio de este último capítulo de nuestro curso introductorio al Cálculo Diferencial es muy importante que el estudiante comprenda el concepto de “razón de cambio promedio” y “razón de cambio instantánea”, estos se refieren a los cambios de una magnitud con respecto a otra con la que de alguna manera está relacionada.

Razón de cambio: En nuestra vida cotidiana podemos observar estas “razones de cambio” en diversos campos del donde se desempeña el ser humano. Estas se dan en el entorno económico, social, científico, etc. En muchas de estas situaciones nos interesa conocer en, un momento dado, cuál será el valor más pequeño (mínimo) o el valor más grande (máximo), cómo y cuando aumenta (crece) o cómo y cuándo disminuye (decrece) dicho valor en un intervalo de tiempo específico.

Es decir, problemas donde podamos estudiar los fenómenos relativos a la variación de una o más cantidades que dependen de otra(s), por lo que resulta de vital importancia describir y cuantificar estos cambios por medio de modelos matemáticos (ecuaciones), gráficas y/o tablas.

Pensemos por un momento en los siguientes hechos.

Una persona sube a través de una colina empezando por su parte más baja, a medida que la persona sube se modifican al mismo tiempo la distancia horizontal (eje de las x) y la distancia vertical (eje de las y), cada vez que avanza un paso estas variables se modifican en cierta cantidad, es decir hay una razón cambio entre ambas.

En una ciudad pequeña la población aumenta año tras año demandando mayores volúmenes de agua, cada vez que hay un aumento en la población lo hay también en la demanda de agua, es decir hay una razón de cambio entre ambas variables.

Considere que a partir del primer día del nacimiento de un niño el pediatra mes a mes lleva un registro de su crecimiento, a medida que el tiempo pasa la estatura del niño se va modificando, de tal manera que hay una razón de cambio en su estatura a medida que pasa el tiempo.

En una reacción química y bajo ciertas condiciones a medida que pasa el tiempo los reactivos se van convirtiendo en productos, es decir, a medida que pasa el tiempo hay una razón de cambio entre la cantidad de reactivos que disminuye y la cantidad de productos que se forman.

Y así podríamos enumerar una cantidad de fenómenos donde encontramos estas razones de cambio.

Razón de cambio promedio: Se define matemáticamente como:

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Esto es, para poder calcular la "razón de cambio promedio" para cualquier pareja de puntos es necesario formar el cociente anterior.

Recuerde que en capítulos anteriores determinamos que el cociente $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ expresa la pendiente de una recta.

Por lo que podemos concluir al respecto, que cada vez que se realiza un cálculo para obtener la razón de cambio promedio, se está calculando la pendiente de la recta secante para la pareja de puntos considerados.

Razón de cambio instantánea: Esta se define matemáticamente como:

$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ aunque esta expresión también se puede simbolizar de la siguiente forma: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Veamos los siguientes problemas donde aplicamos estas definiciones.

1. Una empresa fabricante de frenos para automóvil somete su sistema a una prueba la cual consiste en determinar el tiempo total necesario (el tiempo desde que el conductor detecta el peligro hasta que la unidad se detiene) que se requiere para detener al vehículo, el fabricante del sistema de frenos asegura que solo se necesitan 0.55 sg. Para detener el vehículo si este lleva una velocidad de 40 $\frac{m}{sg}$, los resultados obtenidos se muestran en la siguiente tabla, a partir de estos datos probemos si la afirmación de fabricante es cierta o falsa.

Velocidad (v) $\frac{m}{sg}$	x	0	5	10	15	20	25	30	35
Distancia a la la unidad se detiene (m)	y	0	0.6	1.6	2.7	4.1	6.2	8.8	11.9

Fig. 1

Nota: Se deja como ejercicio al estudiante elaborar la gráfica de estos resultados.

Como primer paso calculemos los tiempos promedios para cada par de puntos consecutivos:

a) 0-5 $\frac{m}{sg}$ $\frac{0.6-0}{5-0}=\frac{0.6}{5}=\mathbf{0.12\ sg}$ b) 5-10 $\frac{m}{sg}$ $\frac{1.6-0.6}{10-5}=\frac{1}{5}=\mathbf{0.20sg}$

c) 10-15 $\frac{m}{sg}$ $\frac{2.7-1.6}{10-15}=\frac{1.1}{5}=\mathbf{0.22sg}$ d) 15-20$\frac{m}{sg}$ $\frac{4.1-2.7}{20-15}=\frac{1.4}{5}=\mathbf{0.28sg}$

e) 20-25 $\frac{m}{sg}$ $\frac{6.2-4.1}{25-20}=\frac{2.1}{5}=\mathbf{0.42sg}$ f) 25-30 $\frac{m}{sg}$ $\frac{8.8-6.2}{30-25}=\frac{2.6}{5}=\mathbf{0.52sg}$

Ahora con estos resultados probemos la afirmación del fabricante de frenos

$\frac{cambio\ de\ dist.}{cambio\ de\ vel.}=\frac{14.0-11.9}{40-35}=\frac{2.1}{5}=\mathbf{0.42sg}$

Como en los resultados anteriores para una velocidad de $\mathbf{30}\frac{m}{sg}$ requiere un tiempo de 0.52 sg entonces no es posible que a una velocidad de 40$\frac{m}{sg}$ requiera menos tiempo, por lo que la afirmación del fabricante de frenos es erronea.

2. En un aeropuerto se lanza un globo meteorológico para pronosticar el clima, el cual asciende en forma vertical, después de x tiempo (en horas) alcanza una altitud f medida en Km, esta altura está definida por la función:

$\boldsymbol{f(x)=-2x^2+4x}$

Calcule cual será su velocidad instantánea después de de ½ hora de haber sido lanzado.

Solución:

Primero calculemos la velocidad promedio entre dos puntos consecutivos, en este caso entre 1 y 0.5 hrs.

$\boldsymbol{f(0.5)=-2(0.5^2)+4(0.5)=1.5}$

$\boldsymbol{f(1)=-2(1^2)+4(1)=2.0}$

Similarmente calculemos las alturas promedios para intervalos cada vez más pequeños iniciando con un valor de 0.5

De 0.5 a 0.51

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1.5198-1.5}{0.51-0.5}=\mathbf{1.98\ Km/h}$

De 0,5 a 0.501

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1.5198-1.5}{0.501-0.5}=\mathbf{1.998\ Km/h}$

Si tomamos intervalos cada vez más pequeños entonces $\Delta x\to\mathbf{0}$, por lo que el valor límite tiende a 2, es decir, después de 0.5 hr la velocidad del globo será de $\mathbf{2\ Km/hr}$.

Se deja como ejercicio al estudiante el trazo de la gráfica y realizar el cálculo para valores de 0.5001 y 0.50001

Aplicaciones de la derivada a problemas de movimiento (cinemática).

Para resolver este tipo de problemas aplicados a la física recordemos las siguientes fórmulas básicas de la cinemática:

$\boldsymbol{Velocidad} = \frac{\boldsymbol{Desplazamiento((unidades\ de\ longitud)}}{\boldsymbol{tiempo\ empleado}} = \frac{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{t}}$, $\boldsymbol{Aceleraci\acute{o}n} = \frac{\boldsymbol{velocidad}}{\boldsymbol{tiempo}}$, en el lenguaje del Cálculo esto se expresa de la siguiente forma.

$\boldsymbol{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{ds}{dt}$, $\boldsymbol{a} = \frac{\Delta_v}{\Delta_t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{dv}{dt}$, la aceleración es también $\boldsymbol{a} = \frac{d^2}{dt}$ de acuerdo a lo anterior.

3 Un automóvil parte del reposo, recorre una distancia definida por la función $\boldsymbol{f = 0.60t^2\ m}$ en $\boldsymbol{t\ sg}$

a) Calcule su velocidad al cabo de t sg.

b) Calcule el tiempo que le toma alcanzar una velocidad $\boldsymbol{v = 15\frac{m}{sg}}$

Solución:

a) $\boldsymbol{v} = \frac{ds}{dt}$, $\boldsymbol{v} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{0.60t^2}) = \boldsymbol{1.20t}\ \frac{m}{sg}$

b) $\boldsymbol{15 = 1.20t}$ Despejando $\boldsymbol{t}$ tenemos $\boldsymbol{t} = \frac{15}{1.2} = \boldsymbol{12.5\ sg}$

4. Un pequeño cohete experimental asciende $\boldsymbol{t^3\ m}$ en los primeros $\boldsymbol{t\ segundos}$ despùés de su lanzamiento. Calcule cual será su velocidad al alcanzar una altura de 343 m.

Solución:

$\boldsymbol{s = t^3}$, $\boldsymbol{v} = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{t^3}) = \boldsymbol{3t^2}$, por condición $\boldsymbol{s = t^3}$ $\therefore$ $\boldsymbol{t^3 = 343}$, $\boldsymbol{t = 7}$, $\boldsymbol{v = 3(7^2)}$, $\boldsymbol{v = 147}\ \frac{m}{sg}$

5. Un jugador de futbol patea un balón hacia una pared, después de $\boldsymbol{t\ sg}$ alcanza una altura definida por la siguiente función $\boldsymbol{s = 19.6t - 4.9t^2\ m}$. Unos instantes después de iniciar su descenso choca con la pared en un punto situado a $\boldsymbol{14.7\ m}$ de altura con respecto al nivel de suelo.Calcule la velocidad de caida del balón al momento de chocar contra la pared.

Solución:

Designemos por $\boldsymbol{v}$ la velocidad cuando el balón va en ascenso en el instante $\boldsymbol{t}$, luego entonces $\boldsymbol{v} = \frac{ds}{dt}$, como
$\boldsymbol{s = 19.6t - 4.9t^2}$, derivando tenemos

$\boldsymbol{v} = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{19.6t - 4.9t^2}) = \boldsymbol{19.6 - 9.8t}$, pero por condición del problema nos dice que cuando $\boldsymbol{s = 14.7\ m}$ podemos igular

$\mathbf{19.6t - 4.9t^2 = 14.7}$ reordenando esta ecuación nos queda $\mathbf{4.9t^2 - 19.t + 14.7 = 0}$ resolviendo por factorización:

$\mathbf{(t-3)(t-1) = 0}$ el impacto se produce cuando $\boldsymbol{t = 1}$ o $\boldsymbol{t = 3}$, analizando este resultado, cuando $\boldsymbol{t = 1\,sg}$

$\boldsymbol{v = 19.6 - 9.8(1) = 16\,\frac{m}{sg}}$, $\boldsymbol{v} > 0$ como $\boldsymbol{v}$ es positiva nos indica que el balón está en ascenso en ese momento

Cuando $\boldsymbol{t = 3\,sg}$ $\boldsymbol{v = 19.6 - 9.8(3) = -9.8\,\frac{m}{sg}}$, esto quiere decir que cuando $\boldsymbol{t = 3\,sg}$ el balón se impacta con la pared, pero va en descenso razón por la cual $\boldsymbol{v} < 0$.

6. Dos aviones parten de un mismo aeropuerto, el avión XA se dirige hacia el norte a una velocidad de 350 Km/hr, avión XB se dirige hacia el oeste a una velocidad de 470 Km/Hr .Calcule la razón de cambio de la velocidad con que aumenta su separación entre ellos después de dos horas de vuelo.

Solución.

Después de dos horas de vuelo el primer avión ha recorrido una distancia $\boldsymbol{= 350\frac{Km}{Hr}(2\,Hr) = 700Km}$

Después de dos horas de vuelo el segundo avión ha recorrido una distancia $\boldsymbol{= 470\frac{Km}{hR}(2\,Hr) = 940\,Km}$

Llamemos $\boldsymbol{h}$ a la distancia que separa a los dos aviones después de dos horas de vuelo.

Se deja al estudiante como ejercicio el trazo de la gráfica a escala de la distancia en el eje "y" positivo de los 700 Km que recorre el primer avión hacia el norte y los 940 Km de recorrido del segundo avión en el eje "x" $+$, es decir, hacia el este.

Tomando como referencia la gráfica y empleando el teorema de Pitágoras tenemos.

$\mathbf{h^2 = \boldsymbol{x^2 + y^2}}$, despejando $\boldsymbol{h = \sqrt{x^2 + y^2}}$ sustituyendo valores $\boldsymbol{h = \sqrt{(700)^2 + (940)^2}}$, $\boldsymbol{h = 1172\,Km}$

Nuestro interés es conocer la razón de cambio de la separación entre los dos aviones al cabo de dos horas de vuelo, hagamos una derivación implícita de la ecuación $\boldsymbol{h^2 = x^2 + y^2}$

$\boldsymbol{2h\frac{dh}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}}$, para simplificar dividamos entre 2 , $\boldsymbol{\frac{2h}{2}\cdot\frac{dh}{dt} = \frac{2x}{2}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{2y}{2}\cdot\frac{dy}{dt}}$, $\boldsymbol{h\frac{dh}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}$, si el valor de $\boldsymbol{h = 1172\,Km}$, se trata de determinar: $\boldsymbol{\frac{dh}{dt}}$, como la razón de cambio de la coordenada en X es .

$\boldsymbol{\frac{dx}{dt} = 350Km/Hr}$ y la razón de cambio en la coordenada "y" es : $\boldsymbol{\frac{dy}{dt} = 470Km/Hr}$, sustiyendo estos valores en la ecuación anterior tenemos:

$\boldsymbol{(1172Km)\frac{dh}{dt} = (700\,Km)\left(350\frac{Km}{Hr}\right) + (940Km)\left(\frac{470Km}{hr}\right) = (1172Km)\frac{dh}{dt} = 245000Km\cdot\frac{Km}{Hr} + 441800\,Km\cdot\frac{Km}{Hr}}$

Despejando $\frac{dh}{dt}$, tenemos : $\frac{dh}{dt} = \frac{245000\ Km \cdot \frac{Km}{Hr} + 441800\ Km \cdot \frac{Km}{Hr}}{1172\ Km} = \frac{686000\ Km \cdot \frac{Km}{Hr}}{1172\ Km}$, $\therefore$ $\frac{dh}{dt} = \mathbf{586}\ \frac{Km}{Hr}$

Esto quiere decir que después de 2 horas de vuelo, la distancia $\boldsymbol{h}$ que separa a los dos aviones tiene una razón de cambio de $\mathbf{586}\frac{Km}{Hr}$, como el resultado es positivo esto significa que esta distancia es creciente:

3.1. ESTRATEGIAS CENTRADAS EN EL APRENDIZAJE: Problemas propuestos.

a) Una escalera de 3 m de longitud se apoya contra una pared vertical. Si la parte inferior de la escalera resbala alejándose de la pared con una velocidad de 1 m/sg, calcule la rapidez con la que se desliza hacia abajo su extremo superior hacia el piso.

b) Se arroja una bola de billar desde un edificio, la distancia (s en m) que recorre en un determinado tiempo (t en sg) viene dada por la función $\boldsymbol{s = 4.9t^2}$. Calcule su velocidad y aceleración:

1) En un instante cualquiera.
2) Después del primer segundo de haber sido soltado.
3) Cinco segundos después de haberse soltado.

Universidad América Latina
Av. Cuauhtémoc 188-E
Fracc. Magallanes
C.P. 39670
Acapulco, Guerrero, México
www.ual.edu.mx

2011

Para cualquier comentario o sugerencia relativa a los **Servicios**, **Personal Docente**, **Administrativo** ó **Guías de Estudio**, favor de comunicarse a los teléfonos:

Dirección General:
01 (33) 47-77-71-00 ext. 1000 con Claudia Ley de 10:00 a 16:00 Hrs.
Coordinación de Asesores:
01 (33) 47-77-71-00 ext. 1013 con el Lic. Miguel Machuca García de 08:00 a 17:00 Hrs.

e-mail: **vicerrectoria@ual.edu.mx**